Importancia matemática

DE LA

MÚSICA

Estudio matemático, físico é histórico de la gamma musical

POR EL

Dr. Santiago Mundi Giró

BARCELONA

LA MÚSICA ILUSTRADA

A. SALVANS

Calle de Aragón, núm. 313

1900

Tipografía Moderna, Aribau, 60; Barcelona

El Dr. D. Santiago Mundi

A mis amigos, los músicos

Dedicado al estudio y enseñanza de las Matemáticas desde la temprana edad de quince años, en que tuve mi primer alumno; apasionado por la música desde mi infancia, pues ingresé en la orquesta del teatro Principal ó de Sta. Cruz á los trece, y peinando ahora canas, ¡cuántas veces no habré oído que es anómalo, que es incomprensible que existan en mí dos pasiones que consideraban antitéticas! Declaremos que jamás hemos creído en semejante antítesis, pues sabemos que existen relaciones muy cordiales y muy antiguas entre la Música y la Matemática, relaciones que me propongo evidenciar apoyado en la historia de ambas y en textos de autenticidad indiscutible.

No olvidaré nunca que á los músicos principalmente me dirijo; apartaré, por lo tanto, toda dificultad de cálculo. Sin embargo, supondré en ellos conocida la noción del quebrado, de su multiplicación y simplificación, apoyado en que no altera un quebrado cuando se multiplica ó divide sus dos términos por un mismo número, únicas que serán necesarias para comprender este trabajo. Asimismo evitaré, por igual causa, ciertas consideraciones filosóficas que pudieran hacéroslo ininteligible y procuraré en el lenguaje más bien claridad que galanura.

Escuela pitagórica

Pitágoras, geómetra notabilísimo y jefe de una secta filosófica, nació en Samos, isla del Archipiélago griego, perteneciente hoy á la Turquía asiática, en el año 590 antes de la era cristiana. A su poderoso influjo se debe que las Matemáticas se enriquecieran, agregando á las dos antiquísimas ramas, la Geometría y la Astronomía, otras dos muy interesantes: la Aritmética y la Música. No queremos con esto significar que antes del filósofo griego se desconociera el divino arte de los sonidos y el utilísimo y práctico de los números; ambos son tan naturales al hombre, que es imposible y pueril buscar su origen; probablemente son tan antiguos como la existencia de la especie humana. Lo que hicieron Pitágoras y sus sectarios, aplicándoles las consideraciones matemáticas, fué elevarlos á la categoría de ciencias, mientras que hasta entonces se habían considerado como simples artes.

Prescindiendo de la Aritmética y fijando la atención sólo en la Música, diremos que el descubrimiento que hizo sobre los sonidos es de los más importantes que debemos á la escuela pitagórica. He aquí en lo que consistió.

Constitución matemática de la gamma

De tiempo inmemorial se sabía que haciendo vibrar cuerdas de la misma naturaleza, grueso y tensión ó tirantez y de longitudes diferentes, se producían sonidos, tanto más agudos, cuanto más corta era la cuerda: ¿no era natural que el genio matemático midiera las longitudes de las cuerdas y quisiera averiguar la influencia, que tenían en el sonido producido, así como las relaciones, que entre ellos existían? El primer resultado, que le llamó la atención, fué que cuando dos cuerdas producían el intervalo de octava, sus longitudes estaban en relación de 1 : 2. Esto significa que si una cuerda, vibrando en toda su longitud, diese por ejemplo la nota Do, cuando la interceptamos en su punto medio de modo que no vibre más que la mitad de la cuerda, se obtiene la misma nota Do, pero de la octava superior. Si suponemos la longitud de la primera cuerda igual á 1, la segunda será $\frac{1}{2}$. Así como tomando la mitad de la cuerda se produce la octava superior, doblando su longitud se obtendrá por el contrario la octava inferior.

Fijó luego la atención en dos cuerdas que produjeran acorde de quinta, y encontró que sus longitudes estaban en la razón de 2 á 3, ó lo que es lo mismo, que si interceptamos una cuerda, en el tercio de su longitud, de modo que sólo puedan vibrar los dos tercios restantes, se producirá la nota correspondiente á la quinta superior.

Con la misma suposición anterior de tomar por unidad la longitud de una cuerda que produzca la nota Do, resulta que la correspondiente al Sol es $\frac{2}{3}$. Si tomamos los $\frac{2}{3}$ de esta última obtendremos el Re de la octava superior (que convendremos en designar por Re^1), mas los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{2}{3}$ es lo mismo que

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{4}{9} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad Re^1,$$

Los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{9}$ producirá la quinta superior del Re^1 ó sea La^1 cuya cuerda tendrá de largo

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{2 \times 4}{3 \times 9} = \frac{8}{27} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad La^1$$

Asimismo los $\frac{2}{3}$ de $\frac{8}{27}$ serán

$$\frac{8}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{8 \times 2}{27 \times 3} = \frac{16}{81}$$

corresponderán á la quinta superior de La^1 ó sea Mi^2 (significa de dos octavas más agudo).

De modo que procediendo por quintas sucesivas, son evidentes los siguientes resultados:

Do	Sol	Re¹	La¹	Mi²	Si²
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$

números, que forman lo que, en Matemáticas, se llama progresión geométrica ó por cociente y que representan las longitudes de las respectivas cuerdas, que tienen intervalos de quinta.

Fácil es deducir del conocimiento de las que corresponden á Re^1 y La^1, las del mismo nombre de la octava inferior ó sea aquella cuyo Do es unidad, basta como ya hemos dicho multipiicar por 2, así como de Mi^2 y de Si^2 se deducirán las de Mi y Si de dos octavas inferiores, multiplicando por 2×2, es decir por 4. Así

$$Re = Re^1 \times 2 = \frac{4}{9} \times 2 = \frac{4 \times 2}{9} = \frac{8}{9}$$

$$La = La^1 \times 2 = \frac{8}{27} \times 2 = \frac{8 \times 2}{27} = \frac{16}{27}$$

$$Mi = Mi^2 \times 4 = \frac{16}{81} \times 4 = \frac{16 \times 4}{81} = \frac{64}{81}$$

$$Si = Si^2 \times 4 = \frac{32}{243} \times 4 = \frac{32 \times 4}{243} = \frac{128}{243}$$

Así como, para obtener la quinta superior, debemos tomar los $\frac{2}{3}$ de la cuerda, es decir multiplicar su longitud por $\frac{2}{3}$, se obtendrá como consecuencia lógica que para producir la quinta inferior deberá dividirsela por $\frac{2}{3}$, ó lo que es lo mismo multiplicar por el quebrado invertido $\frac{3}{2}$. Así designando por Fa_1 el co—

rrespondiente á la octava inferior de la que nos sirve de tipo, tendremos

$$Fa_1 = Do : \frac{2}{3} = Do \times \frac{3}{2} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Ahora bien, según la relación de octava tendremos

$$Fa = Fa_1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

En resumen: la constitución de la escala musical es, según Pitágoras, la siguiente:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do[1]
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

La longitud de Mi se encuentra también multiplicando la de Re por $\frac{8}{9}$

$$\underbrace{\frac{8}{9}}_{Re} \times \frac{8}{9} = \frac{8 \times 8}{9 \times 9} = \underbrace{\frac{64}{81}}_{Mi}$$

Asimismo puede hallarse la de La y Si multiplicando respectivamente la de Sol y La por el mismo $\frac{8}{9}$

$$\underbrace{\frac{2}{3}}_{Sol} \times \frac{8}{9} = \frac{2 \times 8}{3 \times 9} = \underbrace{\frac{16}{27}}_{La}$$

$$\underbrace{\frac{16}{27}}_{La} \times \frac{8}{9} = \frac{16 \times 8}{27 \times 9} = \underbrace{\frac{128}{243}}_{Si}$$

Consideraba, pues, dicha escuela, intervalos iguales: los de Do á Re, de Re á Mi, de Fa á Sol, de Sol á La y de La á Si, designándolos con el nombre de tono. Las razones de las longitudes de sus cuerdas eran constantemente $\frac{8}{9}$. En efecto, tenemos

$$\frac{8}{9} \text{ (Re)} : 1 \text{ (Do)} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{64}{81} \text{ (Mi)} : \frac{8}{9} \text{ (Re)} = \frac{64}{81} \times \frac{9}{8} = \frac{64 \times 9}{81 \times 8} = \frac{8 \times 9}{81} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (Sol)} : \frac{3}{4} \text{ (Fa)} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{16}{27} \text{ (La)} : \frac{2}{3} \text{ (Sol)} = \frac{16}{27} \times \frac{3}{2} = \frac{16 \times 3}{27 \times 2} = \frac{8 \times 3}{27} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{128}{243} \text{ (Si)} : \frac{16}{27} \text{ (La)} = \frac{128}{243} \times \frac{27}{16} = \frac{128 \times 27}{243 \times 16} = \frac{8 \times 27}{243} = \frac{8}{9} \text{ (Nota A)}$$

Los intervalos entre Mi y Fa y entre Si y Do [1] resultan iguales entre sí y menores que los anteriores, designólos con el nombre de semitono y dióles el valor de $\frac{243}{256}$

$$\frac{3}{4} \text{ (Fa)} : \frac{64}{81} \text{ (Mi)} = \frac{3}{4} \times \frac{81}{64} = \frac{3 \times 81}{4 \times 64} = \frac{243}{256}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (Do}^1\text{)} : \frac{128}{243} \text{ (Si)} = \frac{1}{2} \times \frac{243}{128} = \frac{1 \times 243}{2 \times 128} = \frac{243}{256}$$

Nota A.—Hemos simplificado el quebrado $\frac{128 \times 27}{243 \times 16}$ dividiendo primero sus dos términos por 16 y luego los dos del quebrado resultante por 27, con lo que no altera.

Para que este último intervalo pudiera llamarse con toda propiedad semitono, sería necesario que la sucesión de dos, iguales á este valor, produjeran un tono, es decir que

$$\frac{243}{256} \times \frac{243}{256} \text{ fuese } \frac{8}{9}$$

siendo así que el producto de estos dos quebrados es

$$\frac{243 \times 243}{256 \times 256} = \frac{59049}{65536}$$

Para hacer ver que es algo distinto de lo que debería ser, nos bastará el siguiente cálculo, bien sencillo:

$$\frac{59049}{65536} = \frac{59049 \times 9}{65536 \times 9} = \frac{531441}{589824}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{8 \times 65536}{9 \times 65536} = \frac{524288}{589824}$$

como los dos quebrados resultantes tienen el mismo denominador y el primer numerador es mayor, nos demuestra que, efectivamente, era impropia la denominación dc semitono con que se le designó.

Sectas musicales

La antigüedad tuvo dos sectas ó escuelas musicales antitéticas por completo, cuyos jefes respectivos fueron Pitágoras y Aristoxene. Consideraban los sectarios del último (qne prescindían de toda clase de medición), la escala diatónica constituída por cinco tonos y dos semitonos que venían á constituir un sexto tono más, mientras que sus impugnadores contestaban que la sucesión de seis valores iguales á $\frac{8}{9}$ no daban por resultado la octava ó $\frac{1}{2}$, como lo atestigua el siguiente cálculo:

$$\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9} = \frac{262144}{531441}$$

quebrado que por tener el numerador menor que la mitad del denominador es un poco inferior á $\frac{1}{2}$ mientras que debía haber resultado exactamente $\frac{1}{2}$; si la octava constase de los seis tonos ó doce semitonos que suponían, los que no admitían la ingerencia de la ciencia, en el arte de los sonidos. La longitud de la cuerda correspondiente á seis tonos, ya que es menor que $\frac{1}{2}$, significa que la sucesión de seis tonos daría un intervalo algo mayor que una octava. Su exceso parece se le había designado con el nombre de *comma*, sin embargo que hoy entendemos, bajo esta denominación, otro pequeño intervalo, de que más adelante hablaremos.

Para la escuela pitagórica, era axiomático, que un intervalo musical no era agradable al oído, sino cuando la relación, entre las cuerdas productoras, era sencilla. Fácilmente se comprende que admitieran la quinta, la cuarta y sobre todo la octava, cuyos respectivos valores $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ son sumamente sencillos, y que desecharan como ingratas al oído lo mismo la tercera Do, Mi que la tercera menor Re, Fa, por ser complicadas las relaciones de las respectivas cuerdas

$$\underset{\text{Mi}}{\frac{64}{81}} : \underset{\text{Do}}{1} = \frac{64}{81} \qquad \underset{\text{Fa}}{\frac{3}{4}} : \underset{\text{Re}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{8} = \frac{3 \times 9}{4 \times 8} = \frac{27}{32}$$

¡increíble nos parece hoy tales consideraciones! no obstante debe observarse que la tercera mayor se ha modificado en los tiempos modernos y que su valor actual $\frac{4}{5}$ (como veremos luego) es bastante más sencillo. En una palabra, nuestro intervalo de tercera no es igual al antiguo, el actual es agradable; pero una pequeña alteración ó desafinación lo hacen insoportable, como saben todos los músicos; por lo tanto, si los antiguos griegos no conocieron más que el acorde alterado, no debe admirarnos que no lo considerasen como harmónico. Consecuencia lógica de esto, es que tenían que desconocer por precisión, lo mismo el acorde mayor, que el menor. Si acaso existían sus harmonías debían circunscribirse al empleo de la cuarta, quinta y octava sin formar jamás verdadero acorde. Creemos, por lo tanto, que la música antigua era una simple melodía, aserto que parece corroborado por el antiquísimo canto llano que con tanta fruición estamos oyendo en nuestros templos. Llegaron á tal extremo los pitagóricos, que hasta rehusaron como inharmónico el intervalo de undécima ó sea con la cuarta de la octava superior porque no consideraban simple su valor $\frac{3}{8}$. Los aristoxénicos, por el contrario, prescindiendo de las leyes de las cuerdas vibrantes, y no admitiendo más que á los sentidos, decían que si dos notas de una misma octava son harmónicas, deben serlo cuando una de ellas se traslada á otra octava; es así que la cuarta es agradable al oído, luego debe serlo el intervalo de undécima. Del debate notable que la rivalidad entre aquellas dos escuelas contemporáneas produjo, deducimos que una y otra escuela se olvidaron de la necesidad imprescindible de que se reuna la teoría á la práctica para que las dos puedan mutuamente rectificarse.

Tetracordos

En su origen la lira, el instrumento clásico de los griegos, no tenía más que cuatro cuerdas ó tetracordo (tetra significa cuatro) que respondían á nuestras actuales notas

Si, Do, Re, Mi

sus tres intervalos eran un semitono y dos tonos (en los tiempos modernos diríamos un semitono, un tono mayor y otro menor). Posteriormente se le añadieron tres cuerdas más, siendo las siete

Si, Do, Re, Mi, Fa, Sol, La

que puede considerarse como el resultado de dos tetracordos de iguales condiciones

Si, Do, Re, Mi, ⌒ Mi, Fa, Sol, La

el último elemento del primero, es común al primero del segundo, por lo que se llamaron tetracordos conjuntos.

Pitágoras observó que esta sucesión de sonidos no llenaba la extensión de la octava y le ocurrió reformar el orden de los dos tetracordos invirtiéndolos, debiendo entonces tener el instrumento ocho cuerdas

Mi, Fa, Sol, La — Si, Do, Re, Mi

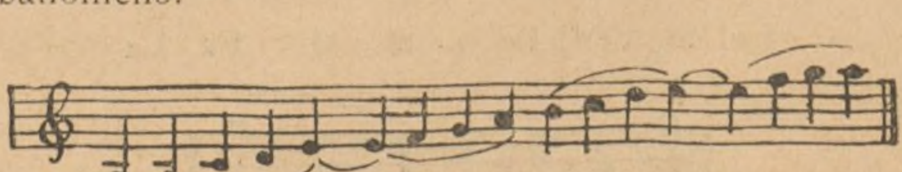
que constituían toda la escala y que fueron llamados tetracordos disjuntos por ser distinta la terminación del uno con el principio del otro. Obsérvase que en sus comienzos, la escala diatónica descansaba sobre la tercera en vez de apoyarse como en la actualidad sobre la tónica, lo que explica el por qué tantas veces termina el canto gregoriano en la tercera. Queriendo dar más amplitud á los cantos se añadieron tres cuerdas inferiores al primer tetracordo y otras tres superiores al segundo; resultó, pues, constituída del siguiente modo:

Si, Do, Re—Mi, Fa, Sol, La—Si, Do, Re, Mi—Fa, Sol, La

que puede suponerse formada por dos tetracordos conjuntos y otros dos disjuntos, como lo aclara la constitución siguiente:

Si, Do, Re, Mi   Mi, Fa, Sol, La
Mi, Fa, Sol, La — Si, Do, Re, Mi

Se completé la doble octava añadiendo un La en el extremo grave, nota á la que se le llamó proslambanómeno.



De la constitución de esta doble octava que tenía en medio la nota La (llamada mese ó cuerda media), proviene probablemente, que la afinación de las orquestas sea por dicha nota.

Géneros

Existían en la música griega tres géneros: el diatónico, el cromático y el anharmónico. El primero es el que hemos explicado ya. La gamma cromática venía á ser

Si, Do, Do$^{\text{sost.}}$, Mi   Mi, Fa, Fa$^{\text{sost.}}$, La
Mi, Fa, Fa$^{\text{sost.}}$, La–Si, Do, Do$^{\text{sost.}}$, Mi

siendo cromática la música que no usaba otros sonidos que los anteriores. Era este género menos natural que el diatónico y bastante más duro, por lo que debía usarse con parsimonia. Sin embargo, su misma dureza era, según los antiguos, á propósito para la expresión de ciertas pasiones. Evidentemente que este cromatismo era bien diferente del actual que sube y desciende en sus cantos, por una serie completa de semitonos.

Por último, la gamma anharmónica admitía el intervalo de cuarto de tono, que convendremos en designar por *. Las notas usadas en ella eran

La, Si, Si *, Do — Mi, Mi *, Fa, La

repetidas en diferentes octavas. Constituía, según los griegos, el género más perfecto y más difícil. Debemos añadir que en los tiempos modernos no ha quedado de él ningún rastro.

Tonos

Añadamos que consideraban tres tonos principales el Dórico, el Frigio y el Lidio, cuyas respectivas gammas eran

Dórico.. .	La, Si, Do, Re, Mi, Fa, Sol, La
Frigio. . .	Si, Do$^{\text{sost.}}$, Re, Mi, Fa$^{\text{sost.}}$, Sol, La, Si
Lidio. . .	Do, Re, Mi b, Fa, Sol, La b, Si b, Do

que correspondían á nuestros actuales tonos en Do, Re y Mi b. Existían otros tres inferiores á los anteriores en una cuarta, llamados respectivamente Hipodórico, Hipofrigio é Hipolidio (Hipo significa debajo); eran por lo tanto nuestros tonos en Sol, La y Si b. Sus gammas eran

Hipodórico	Mi, Fa$^{\text{sost.}}$, Sol, La, Si, Do, Re, Mi
Hipofrigio.	Fa$^{\text{sost.}}$, Sol$^{\text{sost.}}$, La, Si, Do$^{\text{sost.}}$, Re, Mi, Fa$^{\text{sost.}}$
Hipolidio..	Sol, La, Si b, Do, Re, Mi b, Fa, Sol

En el tiempo de Ptolomeo se admitió, á más de estos seis tonos, el Mixolidio, un tono más alto que el Lidio y por lo tanto en Fa. Los tonos entonces únicamente admitidos eran

Hipodórico. . . . . Sol
Hipofrigio. . . . . . . La
Hipolidio.. . . . . Si bemol
Dórico . . . . Do
Frigio. . . . . Re
Lidio. . . . . Mi bemol
Mixolidio.. . . . . Fa

adviértase que todos eran mayores; parece como si en la antigüedad los tonos menores fuesen desconocidos, á pesar de que en alguno de sus cantos se notan vestigios de ellos, aunque con rara frecuencia.

La Escuela aristoxénica admitía doce tonos referentes á los doce semitonos en que consideraban dividida la gamma, en consonancia algunos y otros no con los anteriores. Fueron los siguientes:

Hipodórico.	Sol
Hipofrigio.	La bemol
Hipofrigio acutior.	La
Hipolidio..	Si bemol
Hipolidio acutior.	Si
Dórico.	Do
Yastio.	Do sostenido
Frigio.	Re
Eolio.	Re sostenido
Lidio. . . . . ,	Mi
Hiperdórico. . . . . , , .	Fa
Hiperyastio.	Fa sostenido

Nota.—Hiper significa sobre, y ácutior más agudo.

II

Reforma Ptolemaica

Nuestra bella arte no experimentó ninguna modificación trascendental, hasta que el género humano presenció en Ptolemaida (Egipto), la aparición de otro genio matemático. En el año 115 de nuestra era nació Ptolomeo, uno de nuestros primeros astrónomos y á la par uno de nuestros más esclarecidos geómetras.

Constitución ptolemáica de la gamma

Estudiando la constitución de la escala musical, admitió de los pitagóricos la división de la octava $\frac{1}{2}$ en los dos intervalos de quinta $\frac{2}{3}$ (Do á Sol) y de cuarta $\frac{3}{4}$ (Sol á Do).

$$\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{Quinta}} \times \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{Cuarta}} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{2}{4} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Octava}}$$

Dividió asimismo la quinta en dos terceras desiguales, que distinguió llamando á la primera mayor (Do, Mi) y á la segunda menor (Mi, Sol), asignándoles los respectivos valores $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$ diferentes de los pitagóricos

Terceras

$$\underbrace{\frac{4}{5}}_{\text{mayor}} \times \underbrace{\frac{5}{6}}_{\text{menor}} = \frac{4 \times 5}{5 \times 6} = \frac{4}{6} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{Quinta}}$$

Subdividió por fin la tercera (Do, Mi), no como los antiguos en dos tonos iguales, sino en dos desiguales que los distinguió también con los nombres de mayor (Do. Re) y menor (Re, Mi) con los respectivos valores de $\frac{8}{9}$ y $\frac{8}{10}$

Tonos

$$\underbrace{\frac{8}{9}}_{\text{mayor}} \times \underbrace{\frac{9}{10}}_{\text{menor}} = \frac{8 \times 9}{9 \times 10} = \frac{8}{10} = \underbrace{\frac{4}{5}}_{\text{Tercera mayor}}$$

La alteración de la nota Mi hizo que se consideraran desde aquella innovación como consonancias lo mismo la tercera mayor $\frac{4}{5}$ (Do, Mi) que la menor $\frac{5}{6}$ (Mi, Sol) y alteró á su vez el valor del semitono, que fué $\frac{15}{16}$ en lugar del que le habían asignado los antiguos

$$\underset{\text{Fa}}{\frac{3}{4}} : \underset{\text{Mi}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{16}$$

Supuso, además, que entre Sol y La había como tntervalo un tono menor De lo que resulta que suponiendo la gamma principiada en el Si_1 constaba de dos tetracordos conjuntos é iguales en su constitución.

Si_1	Do	Re	Mi — Mi	Fa	Sol	La
$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$		$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$

Los intervalos son de semitono $\frac{15}{16}$ entre Si_1—Do, y Mi—Fa; de tono mayor $\frac{8}{9}$ entre Do—Re y Fa_1—Sol y de tono menor $\frac{9}{10}$ entre Re-Mi y Sol-La. A pesar de la mejora radical, que estas modificaciones imprimieron en la música, encontró Ptolomeo dificultad en completar la octava, por ninguno de sus dos ex mos. En efecto, superior al La, era lógico que hubiera otra se nota con intervalo $\frac{15}{16}$ mitono que daría el Si b; é inferior al Si_1 correspondería otra que distara u tono menor y en ninguno de los dos casos se obtenía la octava. Pues tenemos para las dos notas extrema

$$La = Sol \times \frac{9}{10} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{2 \times 9}{3 \times 10} = \frac{2 \times 3}{10} = \frac{3}{5}$$

$$Si_1 = Do : \frac{15}{16} = 1 : \frac{15}{16} = 1 \times \frac{16}{15} = \frac{16}{15}$$

Ahora si el intervalo $La_1 - Si_1$ fuese tono menor, tendríamos

$$La_1 = Si_1 : \frac{9}{10} = \frac{16}{15} : \frac{9}{10} = \frac{16}{15} \times \frac{10}{9} = \frac{16 \times 10}{15 \times 9} = \frac{16 \times 2}{3 \times 9} = \frac{32}{27}$$

mientras que por ser

$$La_1 = 2 \times La$$

debía ser $\frac{6}{5}$. Atendiendo á esta consideración, admitió caprichosamente entre La_1 y Si_1 el intervalo de un tono mayor, obteniendo

$$La_1 = Si_1 : \frac{8}{9} = \frac{16}{15} \times \frac{9}{8} = \frac{16 \times 9}{15 \times 8} = \frac{2 \times 9}{15} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$$

que es efectivamente la octava justa del La por ser $\frac{6}{5}$ el doble de $\frac{3}{5}$. Por este medio pudo completar la gamma, que quedó constituída del siguiente modo:

$$La_1 \underbrace{\quad}_{\frac{8}{9}} Si_1 \underbrace{\quad}_{\frac{15}{16}} Do \underbrace{\quad}_{\frac{8}{9}} Re \underbrace{\quad}_{\frac{9}{10}} Mi \underbrace{\quad}_{\frac{15}{16}} Fa \underbrace{\quad}_{\frac{8}{9}} Sol \underbrace{\quad}_{\frac{9}{10}} La$$

ó bien empezando por la tónica, según es costumbre en los tiempos modernos

$$Do \underbrace{\quad}_{\frac{8}{9}} Re \underbrace{\quad}_{\frac{9}{10}} Mi \underbrace{\quad}_{\frac{15}{16}} Fa \underbrace{\quad}_{\frac{8}{9}} Sol \underbrace{\quad}_{\frac{9}{10}} La \underbrace{\quad}_{\frac{8}{9}} Si \underbrace{\quad}_{\frac{15}{16}} Do^1$$

Las longitudes de las cuerdas correspondientes son evidentemente

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do¹
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

La diferencia que existe entre los dos tonos mayor y menor, se la conoce con el nombre de comma, y su valor es $\frac{80}{81}$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{8}{9}}_{\text{mayor}} : \underbrace{\frac{9}{10}}_{\text{menor}}}_{\text{Tono}} = \frac{8}{9} \times \frac{10}{9} = \frac{8 \times 10}{9 \times 9} = \underbrace{\frac{80}{81}}_{\text{Comma}}$$

y este mismo valor expresa la discordancia entre la tercera mayor moderna y la antigua.

$$\underbrace{\underbrace{\frac{64}{81}}_{\text{antigua}} : \underbrace{\frac{4}{5}}_{\text{moderna}}}_{\text{Tercera mayor}} = \frac{64}{81} \times \frac{5}{4} = \frac{64 \times 5}{81 \times 4} = \frac{16 \times 5}{81} = \underbrace{\frac{80}{81}}_{\text{Comma}}$$

Es evidente que todas las terceras mayores Do—Mi, Fa—La y Sol—Si son iguales entre sí por estar constituídas por un tono mayor y otro menor, valiendo por lo tanto

$$\frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{8 \times 9}{9 \times 10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

valor sencillo y que según los principios pitagóricos debería responder á una verdadera consonancia, y en efecto las terceras mayores actuales que debemos á Ptolomeo son sumamente harmoniosas. Por el contrario, las terceras menores Re—Fa, Mi—Sol y La—Do no son todas iguales, pues la primera consta de un tono menor y un semitono, mientras que las otras dos están formadas por el mismo semitono y un tono mayor. Deben diferenciarse, pues, en una comma

$$\underset{\text{Fa}}{\frac{3}{4}} : \underset{\text{Re}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{8} = \frac{3 \times 9}{4 \times 8} = \frac{27}{32}$$

valor de la tercera menor pitagórica

$$\underset{\text{Sol}}{\frac{2}{3}} : \underset{\text{Mi}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

$$\underset{\text{Do}^1}{\frac{1}{2}} : \underset{\text{La}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

valor bastante más sencillo que el anterior, su relación es

$$\frac{5}{6} : \frac{27}{32} = \frac{5}{6} \times \frac{32}{27} = \frac{5 \times 32}{6 \times 27} = \frac{5 \times 16}{3 \times 27} = \frac{80}{81} \text{ (comma)}$$

Escalas cromáticas

Hallemos ahora, la razón entre la tercera mayor y la menor modernas

$$\overset{\text{Terceras}}{\underset{\text{mayor}}{\frac{4}{5}} : \underset{\text{menor}}{\frac{5}{6}}} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} = \frac{4 \times 6}{5 \times 5} = \frac{24}{25}$$

de donde se deduce

$$\frac{4}{5} = \frac{5}{6} \times \frac{24}{25}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{4}{5} : \frac{24}{25}$$

luego una tercera menor se convierte en mayor con sólo multiplicar por $\frac{24}{25}$ la longitud de la cuerda correspondiente á la nota aguda, y por el contrario se convertirá una tercera mayor en menor dividiendo la longitud de dicha cuerda por $\frac{24}{25}$ ó lo que es lo mismo, multiplicándola por el quebrado invertido $\frac{25}{24}$.
De ahí se deduce que si se quiere aumentar un semitono á una nota ó afectarla de un sostenido, multiplicaremos el largo de su cuerda por $\frac{24}{25}$; y si por el contrario quiere bajársele un semitono ó darle un bemol, multiplicaremos por $\frac{25}{24}$

Fácilmente comprenderemos, pues, las dos adjuntas escalas cromáticas, una con sostenidos y la otra con bemoles.

Escala cromática ascendente

Do. . .	1
Do sostenido	$1 \times \frac{24}{25} = \frac{24}{25}$
Re. . .	$\frac{8}{9}$
Re sostenido	$\frac{8}{9} \times \frac{24}{25} = \frac{8 \times 24}{9 \times 25} = \frac{8 \times 8}{3 \times 25} = \frac{64}{75}$
Mi. . .	$\frac{4}{5}$

Fa. . . $\frac{3}{4}$

Fa sostenido $\frac{3}{4} \times \frac{24}{25} = \frac{3 \times 24}{4 \times 25} = \frac{3 \times 6}{25} = \frac{18}{25}$

Sol. . . $\frac{2}{3}$

Sol sostenido $\frac{2}{3} \times \frac{24}{25} = \frac{2 \times 24}{3 \times 25} = \frac{2 \times 8}{25} = \frac{16}{25}$

La. . . $\frac{3}{5}$

La sostenido $\frac{3}{5} \times \frac{24}{25} = \frac{3 \times 24}{5 \times 25} = \frac{72}{125}$

Si. . . $\frac{8}{15}$

Do^1 . . $\frac{1}{2}$

Escala cromática descendente

Do^1 . . $\frac{1}{2}$

Si. . . $\frac{8}{15}$

Si bemol. $\frac{8}{15} \times \frac{25}{24} = \frac{8 \times 25}{15 \times 24} = \frac{25}{15 \times 3} = \frac{5}{3 \times 3} = \frac{5}{9}$

La. . . $\frac{3}{5}$

La bemol $\frac{3}{5} \times \frac{25}{24} = \frac{3 \times 25}{5 \times 24} = \frac{3 \times 5}{24} = \frac{5}{8}$

Sol. . . $\frac{2}{3}$

Sol bemol $\frac{2}{3} \times \frac{25}{24} = \frac{2 \times 25}{3 \times 24} = \frac{25}{3 \times 12} = \frac{25}{36}$

Fa. . .	$\frac{3}{4}$
Mi. . .	$\frac{4}{5}$
Mi bemol	$\frac{4}{5} \times \frac{25}{24} = \frac{4 \times 25}{5 \times 24} = \frac{25}{5 \times 6} = \frac{5}{6}$
Re. . .	$\frac{8}{9}$
Re bemol	$\frac{8}{9} \times \frac{25}{24} = \frac{8 \times 25}{9 \times 24} = \frac{25}{9 \times 3} = \frac{25}{27}$
Do. . .	1

Comparando ambas escalas, puede observarse que los dos intervalos Do—Do sostenido y Do sostenido—Re son desiguales. El primero vale, según hemos dicho, $\frac{24}{25}$, mientras que el segundo nos da

$$\frac{8}{9} : \frac{24}{25} = \frac{8}{9} \times \frac{25}{24} = \frac{8 \times 25}{9 \times 24} = \frac{25}{9 \times 3} = \frac{25}{27}$$

Por el contrario, el intervalo Do—Re bemol es de $\frac{25}{7}$, luego el de Re bemol—Re será

$$\frac{8}{9} : \frac{25}{27} = \frac{8}{9} \times \frac{27}{25} = \frac{8 \times 27}{9 \times 25} = \frac{8 \times 3}{25} = \frac{24}{25}$$

Los dos intervalos son conocidos en música, con el nombre común de semitono, denominación, que se aplica igualmente á los Mi—Fa y Si—Do^1, que valen, según ya hemos visto, otro valor diferente $\frac{15}{16}$. Ninguno de estos tres intervalos, es mitad ni del tono mayor, ni del menor, pues multiplicados por sí mismo no nos dan ni $\frac{8}{9}$ ni $\frac{9}{10}$

$$\frac{15}{16}\times\frac{15}{16}=\frac{15\times15}{16\times16}=\frac{225}{256}=\frac{225\times9}{256\times9}=\frac{2025}{2304}<\frac{8}{9}=\frac{8\times256}{9\times256}=\frac{2048}{2304}$$

$$\frac{24}{25}\times\frac{24}{25}=\frac{24\times24}{25\times25}=\frac{576}{625}=\frac{576\times9}{625\times9}=\frac{5184}{5625}>\frac{8}{9}=\frac{8\times625}{9\times625}=\frac{5000}{5625}$$

$$\frac{25}{27}\times\frac{25}{27}=\frac{25\times25}{27\times27}=\frac{625}{729}=\frac{625\times9}{729\times9}=\frac{5625}{6561}<\frac{8}{9}=\frac{8\times729}{9\times729}=\frac{5832}{6561}$$

lo mismo comprobaríamos que no dan el valor $\frac{9}{10}$.

Con lo anterior también puede verse claramente que una nota sostenida no es igual á la siguiente bemolizada, pues son distintos los números que las representan. Deben considerarse como imperfectos cuantos instrumentos existan, cuyo mecanismo especial no permita distinguir estas pequeñas diferencias. Cuando un músico pretenda que una misma nota sea Do sostenido y Re bemol, probablemente no será ninguna de las dos la que produzca, sino una intermedia entre ambas, distinta lo mismo de la una que de la otra. Y si objetase que su oído no percibe esta pequeña gradación, le contestaríamos que es resultado del hábito de confundir estos sonidos, que le han bastardeado el sentido.

Si nos dirigiéramos á matemáticos, añadiríamos que el verdadero semitono sería la raiz cuadrada, ya sea de $\frac{8}{9}$, ya de $\frac{9}{10}$ y como ambos valores no tendrían raiz exacta, se producirían números incomensurables que jamás encontraríamos con exactitud.

Tonos

Al hablar de los tonos, Ptolomeo decía que todos ellos son semejantes, respecto de la sucesión de los sonidos y que no difieren más que, en el grado de gravedad ó altura de su tónica. Esta aseveración la hemos leído en la Historia de las matemáticas de Montucla, de donde hemos sacado muchos datos para este trabajo. Pues bien, á pesar del respeto que yo guardo para dicho autor, me atrevo á poner en tela de juicio aquel aserto.

Para no hacerme pesado me fijaré sólo en los tres tonos: dórico, frigio y lidio, y veremos que sus gammas son esencialmente distintas por sus respectivos intervalos. Ya hemos visto que la gamma del tono dórico es

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do¹
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

$$\frac{8}{9} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{15}{16} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{15}{16}$$

Asimismo tendremos

Gamma del tono frigio

Re	Mi	Fa sost.°	Sol	La	Si	Do¹ sost.°	Re¹
$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{9}$

$$\frac{9}{10} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{25}{27} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{25}{27}$$

Cálculo aclaratorio para hallar los intervalos

$$\frac{4}{5} : \frac{8}{9} = \frac{4}{5} \times \frac{9}{8} = \frac{4 \times 9}{5 \times 8} = \frac{9}{5 \times 2} = \frac{9}{10} \text{ (tono menor)}$$

$$\frac{18}{25} : \frac{4}{5} = \frac{18}{25} \times \frac{5}{4} = \frac{18 \times 5}{25 \times 4} = \frac{18}{5 \times 4} = \frac{9}{5 \times 2} = \frac{9}{10} \text{ (tono menor)}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{18}{25} = \frac{2}{3} \times \frac{25}{18} = \frac{2 \times 25}{3 \times 18} = \frac{25}{3 \times 9} = \frac{25}{27} \text{ (semitono diferente del dórico)}$$

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{5 \times 2} = \frac{9}{10} \text{ (tono menor)}$$

$$\frac{8}{15} : \frac{3}{5} = \frac{8}{15} \times \frac{5}{3} = \frac{8 \times 5}{15 \times 3} = \frac{8}{3 \times 3} = \frac{8}{9} \text{ (tono mayor)}$$

$$\frac{12}{25} : \frac{8}{15} = \frac{12}{25} \times \frac{15}{8} = \frac{12 \times 15}{25 \times 8} = \frac{3 \times 15}{25 \times 2} = \frac{3 \times 3}{5 \times 2} = \frac{9}{10} \text{ (tono menor)}$$

$$\frac{4}{9} : \frac{12}{25} = \frac{4}{9} \times \frac{25}{12} = \frac{4 \times 25}{9 \times 12} = \frac{25}{9 \times 3} = \frac{25}{27} \text{ (semitono)}$$

Gamma del tono lidio

Mi b,	Fa,	Sol,	La b,	Si b,	Do¹,	Re¹,	Mi¹ b
$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{12}$

$$\frac{9}{10} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{15}{16} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{15}{16}$$

Cálculo aclaratorio para hallar los intervalos

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3 \times 6}{4 \times 5} = \frac{3 \times 3}{2 \times 5} = \frac{9}{10} \text{ (tono menor)}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 3} = \frac{8}{9} \text{ (tono mayor)}$$

$$\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{8 \times 2} = \frac{15}{16} \text{ (semitono igual al dórico)}$$

$$\frac{5}{9} : \frac{5}{8} = \frac{5}{9} \times \frac{8}{5} = \frac{5 \times 8}{9 \times 5} = \frac{8}{9} \text{ (tono mayor)}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{5} = \frac{1 \times 9}{2 \times 5} = \frac{9}{10} \text{ (tono menor)}$$

$$\frac{4}{9} : \frac{1}{2} = \frac{4}{9} \times \frac{2}{1} = \frac{4 \times 2}{9 \times 1} = \frac{8}{9} \text{ (tono mayor)}$$

$$\frac{5}{12} : \frac{4}{9} = \frac{5}{12} \times \frac{9}{4} = \frac{5 \times 9}{12 \times 4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 4} = \frac{15}{16} \text{ (semitono)}$$

De la comparación de estos tres tonos, se deduce que sus gammas son esencialmente diferentes, y sobre todo el frigio se distingue del dórico en no tener más que un tono mayor y cuatro menores, siendo como era natural muy diferentes los semitonos complementarios. El tono lidio se parece más al dórico, tiene lo mismo que él tres tonos mayores y dos menores, y por lo tanto iguales los tonos y los semitonos, pero en distinto orden. Asimismo demostraríamos la desigualdad de los restantes tonos de Ptolomeo y de los doce de Aristoxene. No son, pues, iguales ni semejantes los tonos como Montucla asegura que enunció Ptolomeo. ¡Quién sabe si debido á esta misma diversidad se debe la diferencia que cada uno de ellos produce en nosotros! ¡Qué flaco servicio harán por lo tanto á los autores, los directores de orquesta que tienen la complacencia de bajar ó subir el tono de una pieza porque resulte demasiado aguda ó grave la tesitura de los cantantes!

III

Ligeras nociones de Acústica

Definición

Añadamos para mayor esclarecimiento de cuanto hemos indicado, algunas, poquísimas, nociones de Acústica, es decir de aquella rama de la Física que tiene por objeto el estudio de las vibraciones de los cuerpos elásticos y de los sonidos que de ellas resultan. Mientras la Música se fija en los sentimientos y pasiones que en nosotros pueden excitar, la Acústica sólo atiende á las propiedades de los sonidos, prescindiendo por completo de los efectos producidos.

Sonido y ruído

Lo mismo la ciencia que el arte distinguen el ruído del sonido propiamente dicho. En este último la sensación producida es clara, dura el tiempo necesario para que podamos apreciar su valor musical; mientras que en el ruído, ya sea por su corta duración, como el estampido de un cañón, ya por la multiplicidad de sonidos discordantes que simultáneamente se producen como el rumor del oleaje marítimo, no puede musicalmente apreciarse la altura y demás cualidades del sonido. Sin embargo, esta diferencia es más relativa que absoluta, pues hay oídos privilegiados que pueden determinar el valor musical del ruído producido por las ruedas de un carro sobre nuestros empedrados.

Producción del sonido

Todo cuerpo está constituído por un número infinito de partes pequeñísimas, invisibles, llamadas moléculas. Entre éstas existen siempre dos fuerzas contrarias, la cohesión y la repulsión, que las tienen distantes unas de otras, separadas por espacios infinitamente pequeños que se llaman poros. Cuando una causa cualquiera altera estas distancias, podrá ocurrir que las moléculas tiendan á recobrar su posición primera, ó que, por el contrario, les sea indiferente el cambio. En el primer caso el cuerpo es elástico; en el segundo blando. Sin la elasticidad el sonido no existiría, la blandura no produce más que el silencio.

El sonido es siempre el resultado de oscilaciones rápidas que el roce ó un choque han producido entre las moléculas de un cuerpo elástico. La causa perturbatriz altera el equilibrio que entre las moléculas existe, la elasticidad da fuerza á éstas para que recobren su primera posición, pero no lo logran sino después de un número crecidísimo de idas y vueltas llamadas vibraciones, muy rápidas y cuya amplitud va disminuyendo con prontitud.

Para que estas vibraciones hagan nacer en nosotros la sensación del sonido, es necesario que haya un medio ponderable (pesado) que vibre con él entre el cuerpo sonoro y nuestra oreja. Ordinariamente este medio es el aire, pero podría ser otro gas cualquiera. Los líquidos son también buenos propagadores del sonido, como pueden acreditar los buzos, que desde el fondo de los mares oyen lo que se les dice, desde la superficie. Mejores propagadores son aún los cuerpos sólidos elásticos; así, basta el más ligero ruído producido en uno de los extremos de una viga de madera, aunque no sea más que con las barbas de una pluma, para que en el otro extremo se perciba claramente. El suelo conduce en general tan bien el sonido, que basta aplicarle la oreja, sobre todo en el silencio de la noche, para que se oiga el paso de hombres ó caballos que están á gran distancia, de lo que se aprovechan cuantos militares están en campaña. El sonido se propaga por cualquier cuerpo elástico; no está destruído más que por la interposición de uno blando. Evidentemente se deduce que en el vacío muere el sonido, como se demuestra en Acústica.

Transmisión del sonido

Para formarnos idea de como se transmite el sonido por el aire, fijémonos que alrededor del cuerpo vibrante habrá moléculas, que en la primera semioscilación (ida) serán comprimidas, empujando á su vez las adyacentes hasta formar una esfera condensada (que es limitada debido á la compresibilidad del aire); por el contrario, en la segunda semioscilación (vuelta), las mismas moléculas de dicha esfera estarán ensanchadas, llamando onda sonora al conjunto de las dos mitades condensada y dilatada. Como el movimiento vibratorio hace que las moléculas repitan rápidamente estos vaivenes, asimismo deberán repetirse las ondas sonoras. Esta primera onda esférica actúa de igual modo, aunque con menos intensidad, sobre las moléculas que la rodean, viniendo á constituir una segunda de radio más grande. Así sucesivamente ésta da origen á una tercera, luego á otra y otra, hasta que una de ellas llegue por el pabellón de la oreja á impresionar el tímpano. La vibración de éste se refuerza por algunos huesecillos que tenemos en el oído medio y por fin alcanza la impresión al nervio acústico, que se encarga de transmitirlo al cerebro. El cómo la impresión del cerebro se traduce en sonido, es un enigma que actualmente dosconocemos y que es probable ignoremos siempre.

Intensidad del sonido

Sabiendo que las superficies esfericas son proporcionales á los cuadrados de sus radios (radio × radio), se deduce que la intensidad del sonido debe estar en razón inversa del cuadrado de la distancia. Así, si ésta se duplica, la intensidad será 2 × 2 = 4 veces menor, á triple distancia la intensidad será 3 × 3 = 9 veces menor, y así siguiendo en los demás casos.

Debe influir, además, en la intensidad del sonido, la amplitud de las oscilaciones del cuerpo sonoro; cuanto mayores éstas sean, más intenso resulta el sonido; si por el contrario disminuyen, se apaga éste tanto más cuanto mayor sea la disminución, lo que explica el oficio del pedal celeste de nuestros pianos y de la sordina en los instrumentos de cuerda ó de viento.

La densidad del medio transmisor influye asimismo en aumentar la intensidad del sonido. En la cumbre de las altas montañas el aire es tan enrarecido, que el sonido resulta muy debilitado, de tal modo, que, hasta la explosión de un arma de fuego parece de poca intensidad.

Se refuerzan notablemente los sonidos, con la proximidad de una caja vacía, debido á que el aire de su interior vibra al unísono del que rodea al cuerpo sonoro, propiedad que explica la utilidad de las cajas harmónicas lo mismo en los instrumentos de cuerda que debajo del escenario de nuestros teatros.

La ley del decrecimiento del sonido por la distancia, no es aplicable al caso de que la transmisión se verifique por medio de tubos. Fácil es comprender que las ondas dejan de ser esféricas, adquieren la forma del tubo, y si éste es cilíndrico y recto, el sonido puede transmitirse á distancias increíbles sin sufrir casi alteración. Este fenómeno explica el uso tan frecuente que se hace de los tubos de caoutchouc, pasando desde un almacén á cualquier piso por alto que sea, con los cuales, hablando con voz natural en un extremo, se oye perfectamente desde el otro.

Eco y resonancia

Prescindiendo de la transmisión por tubos adicionales, diremos que mientras no hay nada que lo impida, las ondas sonoras del aire son esféricas. Cuando éstas encuentran un obstáculo se reflejan como todos los cuerpos elásticos, formando el ángulo de incidencia y de reflexión iguales y constituyen nuevas ondas esféricas, cuyo centro está más allá del obstáculo á igual distancia que el cuerpo sonoro. Se verifica entonces la ilusión de que en este nuevo centro, existe otro cuerpo sonoro que responde al unísono del primero. Llámase eco la repetición del sonido producida por la reflexión de cualquier obstáculo. Como según las obras de Física, la velocidad del sonido es de 340 metros por segundo, y durante este tiempo no se pueden pronunciar más de 5 sílabas, resulta que en un $\frac{1}{5}$ de segundo se pronuncia una sílaba y el sonido recorre 68 metros; por lo tanto, para que el eco repita una sílaba ha de estar á 34 metros de distancia, pues entre la ida y la vuelta producida por la reflexión recorrerá la onda sonora 68 metros y empleará por lo tanto $\frac{1}{5}$ de segundo, los sonidos directo y reflejado no se confundirán, y el eco será monosilábico. El eco será bisilábico ó trisilábico cuando el obstáculo esté á doble ó triple distancia de la antes citada. Por el contrario, si la reflexión se verifica á distancia menor de los 34 metros, se confunde el sonido directo con el reflejado y se produce lo que se llama resonancia.

Elementos del sonido

En todo sonido se distingue la altura, la intensidad y el timbre. La altura es la impresión que produce en nuestro oído el mayor ó menor número de vibraciones en un tiempo determinado. Por ellas los sonidos pueden ser graves ó agudos, según sea pequeño ó grande el número de vibraciones. La altura en rigor es relativa; solo son absolutamente graves ó agudos los extremos de la escala de sonidos perceptibles. Los demás son graves ó agudas según con cuales se comparen. La intensidad ó fuerza del sonido no depende del número de vibraciones, sino de la ámplitud que éstas tengan, como ya hemos visto. Un sonido conserva su misma altura si no cambia el número de vibraciones; pero puede variar mucho la intensidad pasando del pianísimo al fortísimo, con sólo variar la amplitud.

Si comparamos dos sonidos de igual altura é intensidad, podrán diferenciarse mucho cuando están producidos por dos instrumentos diferentes. Así nadie confunde el sonido de la trompa con el del clarinete, ni el de la flauta con el del violin, como tampoco confundimos las voces de varias personas de distinto sexo ó de diferente edad. ¿A qué se deben estas diferencias? La causa es el tercer elemento del sonido, el timbre, que hasta nuestros tiempos había pasado por enigmático. Luego veremos la explicación que hoy se da de este elemento.

Altura del sonido

Concretándonos ahora á la altura, diremos que existen varios aparatos en Física que sirven para contar las vibraciones correspondientes á cada sonido por segundo. Por cualquiera de ellos, que no describimos para no complicar este trabajo. se encuentran los siguientes valores para la gamma en do más usual:

Notas. . .	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do[1]
Vibraciones.	512	576	640	680	768	856	960	1024

El número de vibraciones correspondiente á la siguiente gamma superior en una octava, resulta el doble de la anterior así:

Notas. . .	Do[1]	Re[1]	Mi[1]	Fa[1]	Sol[1]	La[1]	Si[1]	Do[1]
Vibraciones.	1024	1152	1280	1360	1536	1712	1920	2048

y así sucesivamente doblando las vibraciones, se irán obteniendo gammas cada vez más superiores.

Por el contrario, resultarán las inferiores tomando sucesivas mitades; así, por ejemplo

Notas. . .	Do_1	Re_1	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do
Vibraciones.	256	288	320	340	384	428	480	512

Debemos advertir que la formación de estas varias gammas, ya superiores, ya inferiores á la usual que nos sirve de comparación, no tiene teóricamente fin ni en un sentido ni en el otro; mas la imperfección de nuestro oído no permite que percibamos sonido más grave que el producido por 16 vibraciones en un segundo, ni más agudos que el que corresponde á 18,000.

El llamado diapasón normal da el La producido por 856 vibraciones.

Vibraciones relativas

El número relativo de vibraciones, ó lo que es lo mismo, el número que corresponde á una sola vibración de su tónica Do, lo encontraremos en la primera de las gammas dividiendo por 512; así obtendremos

Do . . $\frac{512}{512}=1$

Re . . $\frac{576}{512}=\frac{288}{256}=\frac{144}{128}=\frac{72}{64}=\frac{36}{32}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$

Mi . . $\frac{640}{512}=\frac{320}{256}=\frac{160}{128}=\frac{80}{64}=\frac{40}{32}=\frac{20}{16}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$

Fa . . $\frac{680}{512}=\frac{340}{256}=\frac{170}{128}=\frac{85}{64}$ (Nota A)

Sol . . $\frac{768}{512}=\frac{384}{256}=\frac{192}{128}=\frac{96}{64}=\frac{48}{32}=\frac{24}{16}=\frac{12}{8}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

La . . $\frac{856}{512}=\frac{428}{256}=\frac{214}{128}=\frac{107}{64}$ (Nota B)

Si . . $\frac{960}{512}=\frac{480}{256}=\frac{240}{128}=\frac{120}{64}=\frac{60}{32}=\frac{30}{16}=\frac{15}{8}$

Do¹. . $\frac{1024}{512}=2$

Podremos, pues, considerar como números rela-

Nota A.—El quebrado $\frac{85}{64}$ es sensiblemente igual á $\frac{4}{3}$ pues reducidos á un común denominador dan

$$\frac{85}{64}=\frac{85\times 3}{64\times 3}=\frac{255}{192} \qquad \frac{4}{3}=\frac{4\times 64}{3\times 64}=\frac{256}{192}$$

resultados que presentan una pequeña diferencia que debe atribuirse á que en el contador del aparato físico nos da sólo números enteros, cuando en el caso actual tenía que ser fraccionario.

Nota B.—El quebrado $\frac{107}{64}$ es sensiblemente igual á $\frac{5}{3}$ pues

$$\frac{107}{64}=\frac{107\times 3}{64\times 3}=\frac{321}{192} \qquad \frac{5}{3}=\frac{5\times 64}{3\times 64}=\frac{320}{192}$$

sobre cuyos resultados pueden hacerse las mismas observaciones que en la nota anterior.

tivos de vibraciones para las notas de la gamma diatónica, los siguientes:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do¹
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

números que son los valores inversos de las longitudes de las cuerdas que había encontrado Ptolomeo, en consonancia con las leyes, que en Acústica se encuentran, al estudiar las vibraciones de dichas cuerdas.

Leyes de las vibraciones de las cuerdas

Son las siguientes:

1.ª En igualdad de tensión, grosor y densidad, el número de vibraciones está en razón inversa de la longitud.

2.ª En igualdad de las demás condiciones, el número de vibraciones está en razón inversa con el radio de la cuerda.

3.ª El número de vibraciones de una misma cuerda es directamente proporcional á la raiz cuadrada de la tensión. Si ésta es 4 veces mayor, el número de vibraciones será el doble; si 9 veces mayor, el triple, etc.

4.ª Con cuerdas de diferentes substancias y en igualdad de condiciones, el número de vibraciones es inversamente proporcional á la raiz cuadrada de su densidad.

Ciñéndonos á la primera ley, diremos que si una cuerda se hace dos, tres, cuatro veces mayor, el número de vibraciones será dos, tres, cuatro veces menor; en una palabra, que las longitudes y las vibraciones deben expresarse por quebrados invertidos; así tendremos

Notas . . .	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do¹
Vibraciones.	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Longitudes .	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

valores exactamente iguales á los que debemos á Ptolomeo.

De ahí se deduce que en el tiempo en que el Do da 8 vibraciones, el Re da 9, el Mi 10 (pues $\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$), el Sol 12 ($\frac{3}{2}=\frac{12}{8}$), el Si 15 y el Do¹ 16. Y que asimismo á cada tres vibraciones del Do corresponden cuatro para el Fa y cinco para el La.

Intervalos

El intervalo llamado tono mayor, supone que el número de vibraciones de la nota más aguda es igual al de la más grave multiplicado por $\frac{9}{8}$ (que es lo mismo que $1+\frac{1}{8}$): así:

$$\underset{\text{Do}}{1} \times \frac{9}{8} = \underset{\text{Re}}{\frac{9}{8}}$$

$$\underset{\text{Fa}}{\frac{4}{3}} \times \frac{9}{8} = \frac{4\times 9}{3\times 8} = \frac{9}{3\times 2} = \underset{\text{Sol}}{\frac{3}{2}}$$

$$\underset{\text{La}}{\frac{5}{3}} \times \frac{9}{8} = \frac{5\times 9}{3\times 8} = \frac{5\times 3}{8} = \underset{\text{Si}}{\frac{15}{8}}$$

mientras que el tono menor supone que este factor es $\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$ menor que el anterior por ser $\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$

$$\underset{\text{Re}}{\frac{9}{8}} \times \frac{10}{9} = \frac{9 \times 10}{8 \times 9} = \frac{10}{8} = \underset{\text{Mi}}{\frac{5}{4}}$$

$$\underset{\text{Sol}}{\frac{3}{2}} \times \frac{10}{9} = \frac{3 \times 10}{2 \times 9} = \frac{10}{2 \times 3} = \underset{\text{La}}{\frac{5}{3}}$$

y el llamado semitono está representado por el factor $\frac{16}{15}$, muy inferior á los dos anteriores, pues se forma de la unidad y $\frac{1}{15}$.

$$\underset{\text{Mi}}{\frac{5}{4}} \times \frac{16}{15} = \frac{5 \times 16}{4 \times 15} = \frac{16}{4 \times 3} = \underset{\text{Fa}}{\frac{4}{3}}$$

$$\underset{\text{Si}}{\frac{15}{8}} \times \frac{16}{15} = \frac{15 \times 16}{8 \times 15} = \frac{16}{8} = \underset{\text{Do}^1}{2}$$

La razón entre el tono mayor y el menor es la comma de valor $\frac{81}{80} = 1 + \frac{1}{80}$

$$\underset{\text{T.° mayor}}{\frac{9}{8}} : \underset{\text{T.° menor}}{\frac{10}{9}} = \frac{9}{8} \times \frac{9}{10} = \frac{9 \times 9}{8 \times 10} = \underset{\text{Comma}}{\frac{81}{80}}$$

que es el intervalo menor de todos.

De la diferencia de tonos se deducen las siguientes consecuencias. Las terceras podrán ser mayores ó menores, según estén constituídas por dos tonos ó tono y semitono. Las terceras mayores en la gamma en Do son todas iguales formadas por un tono mayor y otro menor, el valor del intervalo es $\frac{5}{4}$

$$\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{9 \times 10}{8 \times 9} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Las terceras menores pueden estar constituídas por un tono mayor y un semitono como Mi — Sol y La — Do valdrán entonces $\frac{6}{5}$

$$\frac{9}{8} \times \frac{16}{15} = \frac{9 \times 16}{8 \times 15} = \frac{9 \times 2}{15} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5}$$

ó por un tono menor y el semitono como Re — Fa, su valor es en vibraciones $\frac{32}{27}$

$$\frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = \frac{10 \times 16}{9 \times 15} = \frac{2 \times 16}{9 \times 3} = \frac{32}{27}$$

El intervalo de cuarta consta siempre de los dos tonos mayor y menor, y un semitono vale $\frac{4}{5}$

$$\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = \frac{9 \times 10 \times 16}{8 \times 9 \times 15} = \frac{10 \times 16}{8 \times 15} = \frac{10 \times 2}{15} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3}$$

La quinta justa, resultante de tres tonos y un semitono, puede tener dos tonos mayores y uno menor como: Do — Sol, Mi — Si, Fa — Do; su valor es $\frac{3}{2}$

$$\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = \frac{9 \times 10 \times 16}{8 \times 8 \times 15} = \frac{9 \times 10 \times 2}{8 \times 15} = \frac{9 \times 4}{8 \times 3} = \frac{3 \times 4}{8} = \frac{3}{2}$$

ó por el contrario, dos tonos menores y uno mayor, como Re — La, resulta ser $\frac{40}{27}$

$$\frac{10}{9}\times\frac{10}{9}\times\frac{9}{8}\times\frac{16}{15}=\frac{10\times10\times16}{9\times8\times15}=\frac{10\times10\times2}{9\times5}=\frac{4\times10}{9\times3}=\frac{40}{27}$$

Como las sextas y séptimas no son más que inversiones de terceras y segundas, se comprende que sus valores sean también inversos de los que á éstas corresponden y que podamos prescindir de su estudio.

Cuanto sobre intervalos hemos dicho se refiere exclusivamente al tono dórico ó en Do, podríamos hacer análogas consideraciones sobre todos los demás tonos; pero no nos atrevemos para no hacernos pesados.

Para terminar diremos que cuando se da un sostenido á una nota, ya que según sabemos debe multiplicarse la longitud de la cuerda por $\frac{24}{25}$, el número de vibraciones aumentará hasta ser igual al producto de las que daba la nota correspondiente por $\frac{25}{24}$. Por el contrario, ya que para bemolizarla se multiplica la longitud por $\frac{25}{24}$, las vibraciones resultarán multiplicando por $\frac{24}{25}$. Así, ya que las vibraciones de Do y Re son respectivamente por segundo 512 y 576, tendremos

Do sostenido. . $512\times\frac{25}{24}=\frac{12800}{24}=533$ vibraciones.

Re bemol. . . $576\times\frac{24}{25}=\frac{13824}{25}=553$ »

y así siguiendo, fácil nos sería formar toda la escala cromática, pero que en el fondo sería una repetición de lo que dijimos cuando sólo hablábamos de longitudes de cuerdas.

Harmónicos

En la vibración de las cuerdas se presenta el fenómeno de que no sólo vibran en toda su longitud, sino que se dividen además en un cierto número de partes alicuotas $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ que cada una produce el sonido derivado que corresponde á su parte de longitud y que se llaman harmónicos. Los números de vibraciones correspondientes serán las inversas de dichas partes alicuotas, es decir 2, 3, 4, 5 . . . y las notas correspondientes resultan ser la octava, la quinta de la octava superior, la doble octava y la tercera mayor superior á ésta, harmónicas, accesibles á un oído algo experimentado. Asi, suponiendo que el sonido fundamental de la cuerda sea Do, los harmónicos resultantes son Do^1, Sol^1, Do^2, Mi^2 . . . obscurecidos todos ellos por el sonido principal correspondiente á toda la longitud de la cuerda.

Interceptando con la presión de un dedo la vibración de la mitad de la cuerda, se produce, como ya dijimos, la octava; pero si en vez de apretar fuertemente el dedo, es sólo una ligerísima presión que no impida la vibración de las dos mitades, se produce el primer harmónico, quedando este punto medio fijo en la vibración, se le designa con el nombre de nodo. Asimismo, si en el tercio de la longitud colocamos ligeramente el dedo y se hace vibrar la cuerda, ésta se divide en tres tercios que vibran simultáneamente, están separados por dos nodos y producen el segundo harmónico. Si la ligera presión se verifica en el cuarto de la longitud, obtendremos el tercer harmónico, pues la cuerda se divide en cuatro partes iguales que vibran simultáneamente presentando tres nodos, y así sucesivamente.

Tubos sonoros

En los instrumentos llamados de viento, el aire no es sólo el propagador del sonido, sino el verdadero productor. La vibración del aire contenido en un tubo recto ó curvo es la causa del sonido. La naturaleza de las paredes del tubo sólo modifica el timbre. La causa productora de la vibración es ó un fuelle, como en el órgano y armonium, ó el aire emitido por los labios del músico por medio de una embocadura puesta en uno de sus extremos. Pueden ser las embocaduras de lengüeta libre como el clarinete, de lengüeta batiente como el fagote, oboe y corno inglés, de forma cónica como en la trompa y todos los instrumentos llamados de metal, y por último un simple agujero, como sucede en la flauta. En todos ellos el aire debe sufrir una serie rápida de condensaciones y dilataciones para que el sonido se produzca. La embocadura debe cumplir la misión de hacer entrar el aire con intermitencias.

Las leyes del sonido producido en los tubos sonoros han sido formuladas por otro gran matemático, por Bernouilli, nacido en Basilea á fines del siglo pasado. Son éstas las siguientes:

En tubos abiertos por los dos extremos, la sola variación de la fuerza de impulsión en la embocadura puede producir sonidos cuyas vibraciones están en progresión aritmética 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . Si suponemos que el sonido fundamental ó producido con la mayor suavidad sea la nota Do, resultan el Do^1, Sol^1, Do^2, Mi^2, Sol^2, Si $bemol^2$, Do^3. Mientras que si el tubo fuese cerrado por uno de sus dos extremos, los sonidos producidos son sólo los impares 1, 3, 5, 7... es decir Do, Sol^{1}, Mi^{2}, Si $bemol^{2}$... En igualdad de condiciones, un tubo abierto produce la nota una octava más alta que si estuviese cerrado, como si su longitud fuese la mitad. Pues en todas ellas el número de vibraciones está en razón inversa de la longitud del tubo, se ve que estas leyes son iguales á las de los cuerpos vibrantes.

Los sonidos harmónicos que acompañan casi siempre á un sonido cualquiera producido, pueden presentarse con diferentes gradaciones de intensidad, en número distinto ó pueden faltar, y á estas diferencias es á las que Helmholtz atribuye la causa productora de la diferencia de timbre.

IV

Para terminar, añadamos que siempre fué grande la simpatía que ha existido entre las Matemáticas y la Música. Si bien es notable, según hemos visto, la influencia que la ciencia exacta ha tenido sobre la bellísima arte de los sonidos, en cambio diremos que el elemento harmónico es fundamental en la matemática ciencia.

Ya en tiempo de Pitágoras se habló de números harmónicos. Se entendía por tal tres números entre los que existe la relación siguiente: diferencia entre el mayor y mediano, es á la diferencia entre el mediano y el menor como el mayor es al menor. Cumplen esta proporción los números 1, $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ longitudes según hemos visto, de cuerdas productoras de los sonidos Do, Mi, Sol que forman acorde perfecto. En efecto

$$1-\frac{4}{5} : \frac{4}{5}-\frac{2}{3}=1 : \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{5} : \frac{12}{15}-\frac{10}{15}=1\times\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{15}=\frac{3}{2}$$

pero como la división primera equivale á

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{15}=\frac{1}{5}\times\frac{15}{2}=\frac{1\times 15}{5\times 2}=\frac{3}{2}$$

resulta

$$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

luego la proporción existe.

Cuando tenemos una serie de números tales que tres consecutivos cualesquiera cumplen con la condición anterior, forman lo que se llama serie harmónica. Tal sucede con la siguiente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+$$

La proporción harmónica, ya en la forma anterior, ya en varias otras de ella derivadas, tiene importancia suma lo mismo en Aritmética que en Algebra y mucho más en Geometría, y sobre todo en Perspectiva, una de sus ramas de gran utilidad en la bella arte de la Pintura.

En la ciencia geométrica, cuatro puntos de una recta son harmónicos cuando las distancias de uno de ellos á los otros tres están expresadas por tres números harmónicos. En el siglo actual se ha trocado la proporción harmónica por la razón anharmónica, en consonancia quizás con los atrevimientos musicales de nuestros tiempos. Entre cuatro puntos cualesquiera de una recta hay siempre razón anharmónica, mientras que para ser harmónicos deben elegirse de modo tal, que sus distancias cumplan con la condición anterior. La proporción harmónica no es más que un caso particular de la razón anharmónica. Los razonamientos matemáticos apoyados en la razón anharmónica del gran Chasles, honra de los matemáticos franceses, son mucho más generales que los que se fundan sobre la proporción pitagórica. Esta generalidad es el sello más característico de la ciencia actual. No es solamente esta generalidad la única ventaja que á la innovación de Chasles debemos. Por su medio se ha podido descifrar actualmente una obra que debemos al primero de todos los geómetras, á Euclides, que vivía 300 años antes de nuestra era, titulada porismas, y que ha sido desde tan remoto tiempo el tormento de todos los matemáticos, pues era considerado como enigmática, no ha podido ser comprendido hasta que Chasles ha introducido en los cálculos el elemento anharmónico. Véase si no debemos estar orgullosos nosotros los músicos, sabiendo que á un elemento puramente nuestro, cual es la proporción harmónica, ó una de sus generalizaciones la razón anharmónica, se debe el milagro que acabamos de referir. ¡Mucho debe la Música á la ciencia matemática; bien se lo ha recompensado!